Diskret oder kontinuierlich modellieren

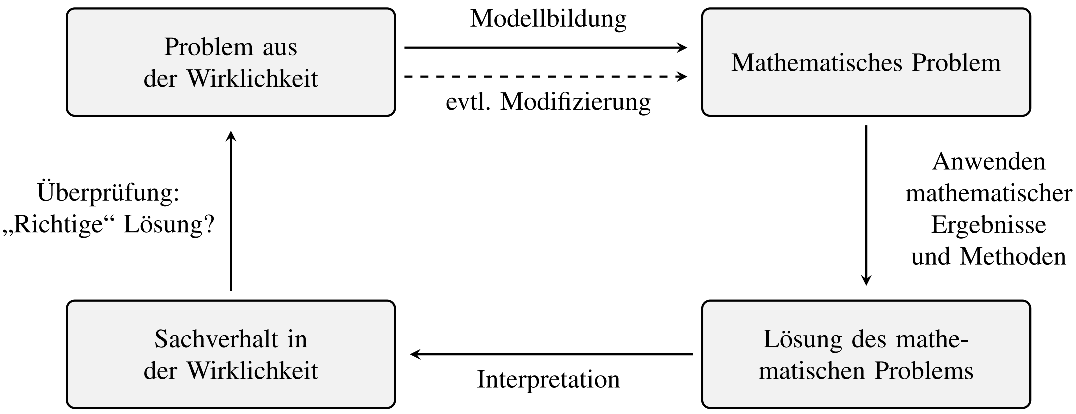
FRANZ PAUER UND FLORIAN STAMPFER (UNIVERSITÄT INNSBRUCK)

1. Einleitung

Mathematisch Modellieren bedeutet, einen Sachverhalt, einen Vorgang, einen Zusammenhang, etc. durch Begriffe der Mathematik zu beschreiben.

Warum wird mathematisch modelliert? Man hofft, damit eine Fragestellung zur betrachteten Situation mit Hilfe mathematischer Methoden zumindest näherungsweise beantworten zu können.

Der Weg vom Problem aus der Wirklichkeit über ein mathematisches Problem, dessen Lösung und Interpretation im Sachzusammenhang bis hin zur Überprüfung, ob die Annahmen bei der Modellbildung nicht zu einer in der Praxis unbrauchbaren Lösung geführt haben, kann vereinfacht so dargestellt werden (vgl. Ortlieb et al., 2009, S. 5):



Für eine andere Darstellung dieses Prozesses siehe zum Beispiel Vollrath & Roth (2012, S. 275).

Der Schwerpunkt dieses Beitrags liegt auf der Diskussion der Unterschiede zwischen diskreter und kontinuierlicher Modellierung aber auch deren Gemeinsamkeiten (Abschnitte 3 bis 6). Für die mathematische Beschreibung von Beziehungen bzw. Zusammenhängen zwischen Mengen werden häufig Funktionen verwendet. Ist deren Definitionsbereich die Menge der natürlichen Zahlen (oder einer Teilmenge davon), spricht man von diskreter Modellierung, ist er die Menge der reellen Zahlen (oder ein Intervall), spricht man von kontinuierlicher Modellierung. Im ersten Fall ist diese Funktion zumeist Lösung einer Differenzengleichung, im zweiten ist sie Lösung einer Differenzialgleichung.

Im Abschnitt 4 wird am Beispiel der Modellierung durch lineare Funktionen darauf hingewiesen, dass manche zunächst als selbstverständlich erscheinenden Schlüsse einer genaueren Betrachtung nicht standhalten.

2. Modellierung in den Lehrplänen

Über die besondere Relevanz von Anwendungen und Modellieren im Mathematikunterricht herrscht spätestens seit den ersten PISA-Testungen international Einigkeit. Mathematisches Modellieren findet sich sowohl in den US-amerikanischen Common Core Standards in Mathematics (CCSS-M, 2010) und in den deutschen Bildungsstandards (KMK, 2013, allgemeine mathematische Kompetenz im Fach Mathematik, K3) als auch in Österreich wieder, zum Beispiel im Konzept der standardisierten Reife- und Diplomprüfung (Bifie, 2015).

Im österreichischen Lehrplan für die Unterstufe (BMUKK, 2000) taucht mathematisches Modellieren prominent in den Bildungs- und Lehraufgaben für den Unterrichtsgegenstand Mathematik auf und auch

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 50, 2017, S. 81–90

im Kernbereich des Lehrstoffs:

> Bildungs- und Lehraufgabe:
>
> Die Schüler und Schülerinnen sollen
>
> - mathematisches Können und Wissen aus verschiedenen Bereichen ihrer Erlebnis- und Wissenswelt nutzen sowie durch Verwenden von Informationsquellen weiter entwickeln. Das Bilden mathematischer Modelle und das Erkennen ihrer Grenzen soll zu einem verantwortungsvollen Umgang mit Aussagen führen, die mittels mathematischer Methoden entstanden sind; (S. 1048)
>
> Folgende mathematische Grundtätigkeiten sind zu entwickeln:
>
> - Kritisches Denken, insbesondere: Überprüfen von Vermutungen; Überprüfen von Ergebnissen; Erkennen von Unzulänglichkeiten mathematischer Modelle; Erkennen von Mängeln in Darstellungen oder Begründungen; Überlegen von Bedeutungen mathematischer Methoden und Denkweisen; Überlegen der Bedeutung des Mathematikunterrichts für die eigene Person.
> - Darstellen und Interpretieren, insbesondere: verbales, formales oder graphisches Darstellen von Sachverhalten; geometrisch-zeichnerisches Darstellen von Objekten; Finden und Interpretieren graphischer Darstellungen; Erstellen und Interpretieren von mathematischen Modellen außermathematischer Sachverhalte. (S. 1049)
>
> Kernbereich:
>
> Die Schülerinnen und Schüler sollen praxisorientierte Aufgaben unter dem Aspekt der Modellbildung möglichst oft rechnerisch, geometrisch und graphisch darstellen, lösen und kritisch betrachten können. Dabei sollen sie von ihrer unmittelbaren Erlebniswelt ausgehen und ihre Erfahrungen auch in fächerübergreifende Vorhaben einbringen. (S. 1052)

Zudem findet sich im Lehrplan der Unterstufe auch ein eigener Arbeitsbereich (Arbeiten mit Modellen, Statistik BMUKK, 2000, S. 1053) in dem sich die Schülerinnen und Schüler über alle vier Schulstufen mit Modellierung auseinandersetzen.

Im August 2016 wurde ein überarbeiteter und neu strukturierter Lehrplan der höheren Schulen verlautbart, der mit 1.9.2017 in Kraft tritt (BMB, 2016, S. 68). Neu ist insbesondere die Gliederung der mathematischen Kompetenzen in unterschiedliche Dimensionen. Dabei wird der Modellierung eine eigene Handlungsdimension gewidmet:

> *Darstellend-modellierendes Arbeiten* umfasst alle Aktivitäten, die mit der Übersetzung von Situationen, Zuständen und Prozessen aus der Alltagssprache in die Sprache der Mathematik zu tun haben. Auch der innermathematische Wechsel von Darstellungsformen gehört zu diesen Aktivitäten.

In den didaktischen Grundsätzen wird der Modellbildungsprozess (siehe Abschnitt 1) thematisiert:

> *Lernen in anwendungsorientierten Kontexten:* Anwendungsorientierte Kontexte verdeutlichen die Nützlichkeit der Mathematik in verschiedenen Lebensbereichen und motivieren so dazu, neues Wissen und neue Fähigkeiten zu erwerben. Vernetzungen (sic!) der Inhalte durch geeigneten fächerübergreifenden Unterricht ist anzustreben. Die minimale Realisierung besteht in der Thematisierung mathematischer Anwendungen bei ausgewählten Inhalten, die maximale Realisierung in der ständigen Einbeziehung anwendungsorientierter Aufgaben- und Problemstellungen zusammen mit einer Reflexion des jeweiligen Modellbildungsprozesses hinsichtlich seiner Vorteile und seiner Grenzen.

Beim Lehrstoff selbst wird insbesondere die Rolle der Funktionen beim mathematischen Modellieren betont:

> Die oben genannten Typen reeller Funktionen, insbesondere Exponentialfunktionen, in außermathematischen Situationen anwenden können; Funktionen als Modelle auffassen, Modelle vergleichen und Grenzen von Modellbildungen reflektieren können

Auch in den Lehrplänen der berufsbildenden höheren Schulen wird Modellierung explizit erwähnt. Stellvertretend nennen wir hier die Bildungs- und Lehraufgabe aller Bereiche für den Unterrichtsgegenstand Angewandte Mathematik für den Lehplan der höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten BMBF (2015):

> Die Schülerinnen und Schüler können
>
> - quantitative Aufgabenstellungen auf dem jeweiligen Wissensstand mathematisch modellieren, numerische Ergebnisse ermitteln und zeitgemäße Rechenhilfen einsetzen;
> - Aufgabenstellungen des Fachgebietes unter Anwendung der aus dem begleitenden fachtheoretischen Unterricht bekannten Gesetze durch Gleichungen und Funktionen modellieren.

Zur Bedeutung mathematischer Modellierung in der fachdidaktischen Literatur verweisen wir auf das Kapitel 13 in Bruder et al. (2015).

3. Modellierung durch Funktionen

3.1. Funktionen

Eine *Funktion* von einer Menge M nach einer Menge N ordnet jedem Element von M genau ein Element von N zu. M heißt dann der *Definitionsbereich* und N der *Wertebereich* der Funktion.

Funktionen können auf verschiedene Weise dargestellt werden: durch eine Tabelle, durch ihren Graphen, durch eine Zuordnungsvorschrift, etc.

Mit Funktionen werden viele Situationen des täglichen Lebens beschrieben, zum Beispiel:

- Preisgestaltung in einem Kaufhaus: Der Definitionsbereich ist die Menge aller Waren in diesem Kaufhaus, der Wertebereich ist die Menge der reellen (oder rationalen) Zahlen. Jeder Ware wird genau ein Preis (in Euro) zugeordnet.
- Verlauf der Temperatur an einem bestimmten Ort: Der Definitionsbereich ist die Menge der Zeitpunkte, zu welchen die Temperatur abgelesen wird. Der Wertebereich ist die Menge aller Temperaturen. Jedem Zeitpunkt im Definitionsbereich wird die abgelesene Temperatur zugeordnet. Nach Wahl einer Einheit für die Temperatur (zum Beispiel 1 °C), kann man für den Wertebereich auch die Menge der reellen Zahlen wählen. Jedem Zeitpunkt im Definitionsbereich wird dann die abgelesene Temperatur in °C zugeordnet.
- Entwicklung des Guthabens auf einem Sparbuch: Der Definitionsbereich ist die Menge aller Zeitpunkte ab dem Datum der Einzahlung, zu welchen das Guthaben verzinst wird. Der Wertebereich ist die Menge aller Geldbeträge (oder, nach Wahl einer Geldeinheit, die Menge der reellen Zahlen). Jedem Zeitpunkt im Definitionsbereich wird das aktuelle Guthaben zugeordnet.

Mit jeder Funktion sind zwei grundlegende Aufgaben der Mathematik verbunden:

- Eine Funktion *auswerten* bedeutet, zu einer gegebenen Funktion f und einem Element m des Definitionsbereichs das Bild $f(m)$ zu bestimmen.
- Die Aufgabe, zu einer gegebenen Funktion f und einem Element n des Wertebereichs die Menge aller Urbilder von n zu bestimmen, heißt eine *Gleichung* .

In den oben betrachteten drei Situationen führen die folgenden Fragen jeweils zu diesen zwei Aufgaben:

- Preisfunktion: Welchen Preis hat eine bestimmte Ware? Welche Waren haben einen vorgegebenen Preis?
- Temperaturverlauf: Welche Temperatur hat es zu einem bestimmten Zeitpunkt? Zu welchen Zeitpunkten hat es eine vorgegebene Temperatur gegeben?
- Guthaben auf einem Sparbuch: Welcher Geldbetrag ist zu einem bestimmten Zeitpunkt auf dem Sparbuch? Wann ist auf dem Sparbuch ein bestimmter Geldbetrag?

3.2. Linear Modellieren

Seien M und N reelle Vektorräume. Eine Funktion von M nach N heißt *linear*, wenn für alle $x, y \in M$ und $c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x) \text{ und } f(x+y) = f(x) + f(y)\,.$$

(Wenn M eindimensional ist, dann folgt die zweite Bedingung aus der ersten).

Linear Modellieren bedeutet, eine Situation durch eine lineare Funktion zu beschreiben. Dazu muss aber vorher überprüft werden, ob das für diese Situation sinnvoll ist. Das kann in der Regel nicht nur mit mathematischen Überlegungen entschieden werden, sondern es ist Sachkenntnis erforderlich.

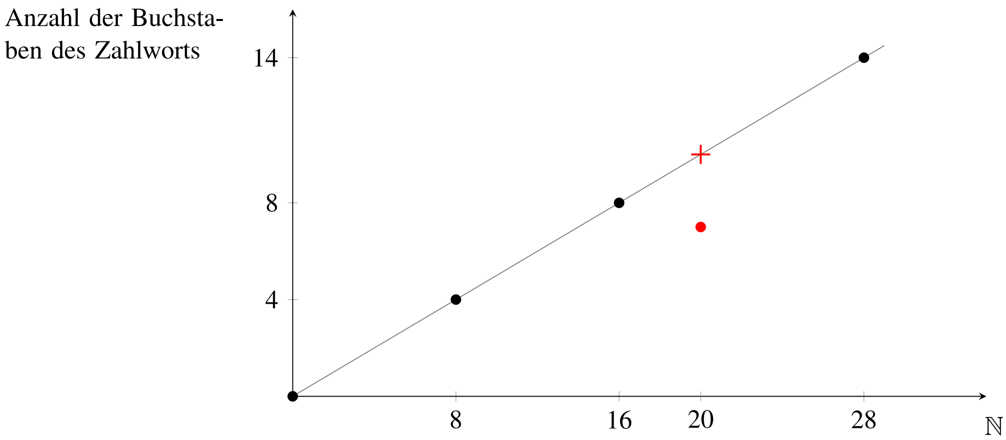
Beispiel: Gewinnfunktion bei *linearer Optimierung*
Ein Betrieb stellt zwei Produkte her. Der Gewinn bei der Produktion von einem Stück des ersten bzw. zweiten Produkts beträgt a bzw. b €. Ist die „Zielfunktion“, die jedem Zahlenpaar (x, y) den Gewinn bei der Produktion von x Stück des ersten und y Stück des zweiten Produkts zuordnet, linear?
Um diese Frage zu beantworten, muss überprüft werden: Verdoppelt bzw. verdreifacht sich der Gewinn, wenn die Produktion verdoppelt bzw. verdreifacht wird? Führt die c-fache Produktion auch zum c-fachen Gewinn? Bleibt der Gewinn gleich, wenn die Produkte nacheinander anstatt zugleich auf den Markt gebracht werden?
Nur wenn diese Fragen mit ja beantwortet werden können, ist die Zielfunktion linear, d. h. der Gewinn bei der Produktion von x bzw. y Stück des ersten bzw. zweiten Produkts gleich $ax + by$ €.

Wenn nur einige Funktionswerte einer Funktion gegeben sind, darf *ohne Wissen über die Sachsituation* nicht geschlossen werden, dass diese Funktion linear ist. Wir geben dazu drei Beispiele an.

Beispiel: Sind die Funktionswerte einer Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an den Stellen 8, 16, 28 durch

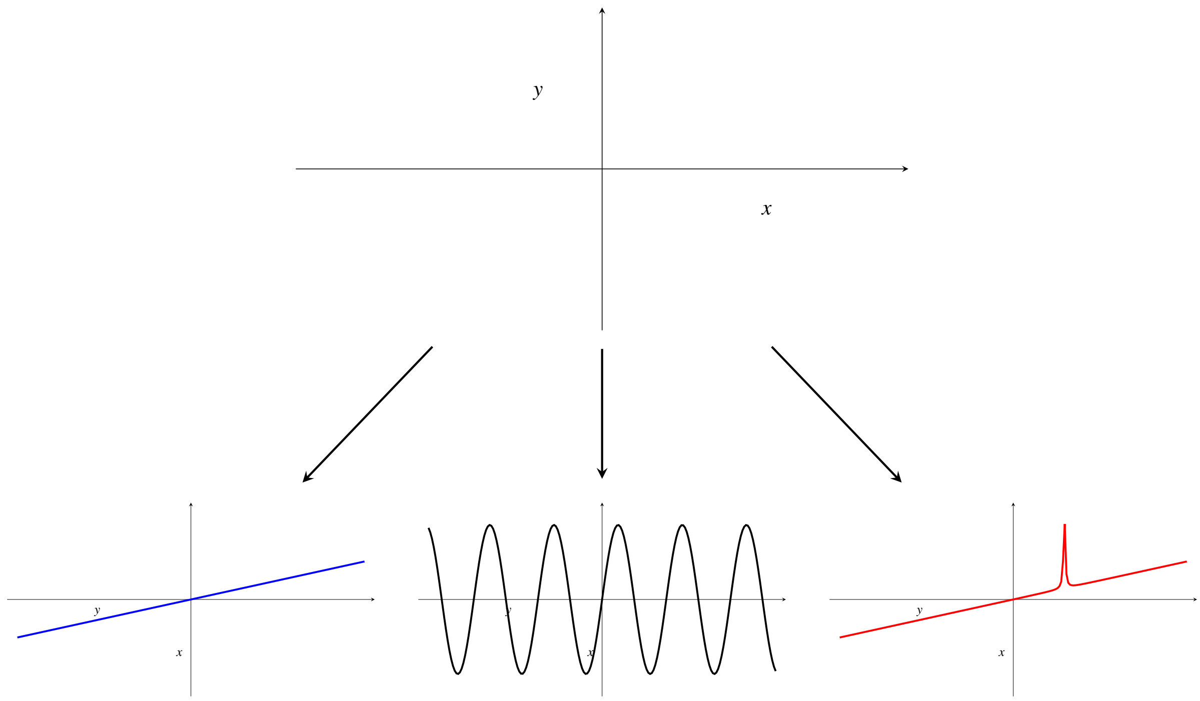
$$f(8) = 4, f(16) = 8, f(28) = 14$$

gegeben, kann man dann auf den Funktionswert an der Stelle 20 schließen? Ohne Wissen über die Situation, die f beschreibt, wäre es vorschnell zu meinen, dass f jeder Zahl ihre Hälfte zuordnet. Die Funktion f könnte ja auch jeder natürlichen Zahl die Anzahl der Buchstaben des deutschen Wortes für diese Zahl zuordnen. Dann ist $f(20) = 7$ (zwanzig hat 7 Buchstaben) und nicht 10.



Beispiel: In manchen Tests wird verlangt, eine endliche Folge von natürlichen Zahlen „fortzusetzen". Aus mathematischer Sicht sind beliebig viele sinnvolle Fortsetzungen möglich. Manchmal wird aber nur eine bestimmte, scheinbar naheliegende Fortsetzung als richtig gewertet. Damit wird nicht überprüft, ob jemand gut denken kann, sondern ob diese Person so denkt wie die meisten Menschen.
Die endliche Folge $1,2,3,4,5$ kann auch nach der folgenden Bildungsregel fortgesetzt werden:
„Bilde für alle positiven natürlichen Zahlen n das Produkt der fünf Vorgänger von n, das ist $(n-1)(n-2)\dots(n-5)$, und addiere dann n".
So erhält man die Folge $1,2,3,4,5,126,727,2528,\dots,(n-1)(n-2)\dots(n-5)+n,\dots$.

Beispiel: Liegen vorgegebene Zahlenpaare auf einer Geraden, kann man ohne weitere Information nicht annehmen, dass zwischen deren ersten und den zweiten Komponenten ein linearer Zusammenhang besteht und diesen durch lineare Regression ermitteln (auch wenn der Korrelationskoeffizient nach Pearson 1 ist). Nehmen wir an, die folgenden 11 Zahlenpaare (x_i, y_i) sind durch Messungen zu den Zeitpunkten x_i entstanden. Eine Funktion mit $f(x_i) = y_i,\ i = 1,\dots 11$, die den gemessenen Vorgang beschreibt, kann linear sein, könnte aber auch eine Sinusfunktion (wenn der Vorgang periodisch ist) sein oder, wenn der Vorgang linear mit einem einzigen zusätzlichen „Impuls" abläuft, eine Funktion mit einem Graphen wie im dritten Bild sein.



4. Diskret modellieren oder kontinuierlich modellieren

- Beschreibt man eine Situation durch eine Funktion, deren Definitionsbereich eine endliche Menge oder die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist, dann hat man sie *diskret modelliert*.
  Ist $\mathbb{N}$ der Definitionsbereich einer Funktion, dann nennt man diese eine *Folge*. Häufig ist diese Folge als Lösung einer *Differenzengleichung* gegeben.

- Beschreibt man eine Situation durch eine Funktion, deren Definitionsbereich ein reelles Intervall oder die Menge der reellen Zahlen ist, so wurde sie *kontinuierlich modelliert*. Häufig ist diese Funktion differenzierbar und als Lösung einer *Differenzialgleichung* gegeben.

Ob diskrete oder kontinuierliche Modellierung sinnvoll ist, hängt von der Sachsituation und von der verfügbaren Information ab.

Zum Beispiel kann der zeitliche Verlauf der Temperatur an einem bestimmten Ort je nach Art der Ablesung diskret oder kontinuierlich modelliert werden:

- Wird ein Thermometer an diesem Ort an jedem Tag um 8 Uhr abgelesen, erhält man eine Folge von Temperaturen, der Verlauf wird also diskret modelliert. Man kann daraus nicht auf die Temperaturen um 14 oder 20 Uhr schließen.
- Wird die Temperatur von einem Schreibgerät aufgezeichnet, erhält man den Graphen einer auf $\mathbb{R}_+$ definierten Funktion, der Verlauf wird in diesem Fall kontinuierlich modelliert. Man kann daraus die Temperaturen zu jedem Zeitpunkt der Vergangenheit (ab dem Beginn der Messung) ablesen.

5. Lineare Differenzen- und Differenzialgleichungen erster Ordnung

Eine *lineare Differenzengleichung der Ordnung 1* (mit konstanten Koeffizienten und vorgegebenem Anfangswert) ist die folgende Aufgabe:

- Gegeben sind reelle Zahlen a und c und eine Folge $h = (h(n))_{n\in\mathbb{N}}$.
- Gesucht ist eine Folge f mit den Eigenschaften:

$$f(0) = a \text{ und } \text{ für alle natürlichen Zahlen } n \text{ ist } \quad f(n+1) = c \cdot f(n) + h(n).$$

Wenn h die Nullfolge ist, dann heißt die Differenzengleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

Zu jeder solchen Differenzengleichung gibt es genau eine Lösung f, deren n-tes Folgenglied $f(n)$ kann induktiv berechnet werden:

$$\begin{aligned}
f(0) &= a, \\
f(1) &= a \cdot c + h(0), \\
f(2) &= c \cdot f(1) + h(1) = a \cdot c^2 + c \cdot h(0) + h(1), \\
&\vdots \\
f(n) &= a \cdot c^n + c^{n-1} \cdot h(0) + c^{n-2} \cdot h(1) + \ldots + c \cdot h(n-2) + h(n-1).
\end{aligned}$$

Ist die Differenzengleichung homogen, also $h = 0$, dann ist die Lösung f die geometrische Folge

$$(a \cdot c^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ist h eine konstante Folge $(d, d, d, \ldots, d, \ldots) = (d)_{n\in\mathbb{N}}$, dann ist

$$f(n) = a \cdot c^n + c^{n-1} \cdot d + c^{n-2} \cdot d + \ldots + c \cdot d + d = a \cdot c^n + d \cdot \sum_{i=0}^{n-1} c^i = a \cdot c^n + d \cdot \frac{c^n - 1}{c - 1}.$$

Lineare Differenzengleichungen können sehr übersichtlich mit Hilfe des *Shift-Operators S* dargestellt werden. Dieser ordnet jeder Folge $g = (g(0), g(1), g(2), \ldots)$ die „um eine Stelle nach links verschobene“ Folge

$$S(g) := (g(1), g(2), g(3), \ldots)$$

zu.

Damit kann eine lineare Differenzengleichung der Ordnung 1 als die folgende Aufgabe beschrieben werden:

- Gegeben sind reelle Zahlen a und c und eine Folge h.
- Gesucht ist eine Folge f mit den Eigenschaften:

$$S(f) = c \cdot f + h \text{ und } \quad f(0) = a.$$

Ersetzt man den Shift-Operator in einer Differenzengleichung durch den Differenzialoperator D, der jeder differenzierbaren Funktion f ihre Ableitung f' zuordnet, erhält man eine „Differenzialgleichung".

Eine *lineare Differenzialgleichung der Ordnung 1* (mit konstanten Koeffizienten und vorgegebenem Anfangswert) ist die folgende Aufgabe:

- Gegeben sind reelle Zahlen a und c, sowie eine Funktion h von einem offenen Intervall (u,v) nach $\mathbb{R}$ und eine reelle Zahl $w \in (u,v)$.
- Gesucht ist eine differenzierbare Funktion f von (u,v) nach $\mathbb{R}$ mit den Eigenschaften:

$$f' = c \cdot f + h \quad \text{und} \quad f(w) = a.$$

Wenn h die Nullfunktion ist, dann heißt die Differenzengleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

Aus der Differenzialrechnung ist bekannt: eine Funktion, deren Ableitung ihr c-Faches ist, ist ein Vielfache der Exponentialfunktion $\exp_c$ mit $\exp_c(t) = e^{ct}$. Man rechnet daher leicht nach, dass für $h = 0$ die Funktion

$$f \text{ mit } f(t) = a \cdot e^{c(t-w)}$$

die (eindeutig bestimmte) Lösung dieser Differenzialgleichung ist.

6. Beispiele

6.1. Verzinsung des Guthabens auf einem Sparbuch

Wir beschreiben die Entwicklung des Guthabens auf einem Sparbuch.

Diskret

Werden mit einer Bank ein Anfangskapital K €, eine Zinsperiode und ein Zinssatz i vereinbart, dann wird der zeitliche Verlauf des Guthabens durch eine Folge $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschrieben. Dabei ist $f(n)$ € das Guthaben am Ende der n-ten Zinsperiode.
Nach Vereinbarung mit der Bank muss f die Eigenschaften

$$f(0) = K \quad \text{und} \quad \text{für alle natürlichen Zahlen } n \text{ ist } f(n+1) = (1+i) \cdot f(n)$$

haben.
Die Lösung dieser Differenzengleichung ist die geometrische Folge

$$(K \cdot (1+i)^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Nach n Jahren liegen also $K \cdot (1+i)^n$ € auf dem Sparbuch.

Kontinuierlich

Möchte man das Guthaben zu jedem Zeitpunkt berechnen können, dann muss ein „stetiger Zinssatz" i und das Anfangskapital K € vereinbart werden. Mit $f(t)$ bezeichnen wir das Guthaben in € nach $t(\in \mathbb{R})$ Jahren. Es wird vereinbart, dass die Funktion f von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$ differenzierbar ist und die Eigenschaften

$$f(0) = K \quad \text{und} \quad f' = i \cdot f$$

hat.
Die Lösung dieser Differenzialgleichung ist die Funktion $K \cdot \exp_i$. Nach t Jahren liegen also

$$K \cdot e^{it} \text{ €}$$

auf dem Sparbuch.

6.2. Frischluftzufuhr

Wir diskutieren das Beispiel 4.33 in Timischl & Kaiser (2005):

> *Während einer Veranstaltung steigt der CO_2-Gehalt der Luft in einem Raum von* $1000\,\mathrm{m}^3$ *auf* $0.1\,\%$ *(Volumsprozent). In einer Pause von* $15\,\mathrm{min}$ *wird Frischluft von* $0.03\,\%$ *CO_2-Gehalt zugeführt.*
>
> *a) Auf wie viel sinkt der CO_2-Gehalt, wenn pro Minute* $100\,\mathrm{m}^3$ *Frischluft zugeführt werden?*
>
> *b) Welche Frischluftmenge müsste pro Minute zugeführt werden, um am Ende der Pause einen CO_2-Gehalt von* $0.04\,\%$ *zu erreichen?*

Zur Modellbildung stellen wir uns die Fragen: Was wissen wir? Was wissen wir nicht? Was suchen wir?

- Zu Beginn des Lüftungsvorgangs befindet sich (gleichmäßig verteilt) $1\,\mathrm{m}^3$ CO_2 in $1000\,\mathrm{m}^3$ Luft.
- Beim Lüften werden in jeder Minute $100\,\mathrm{m}^3$ der Luft im Raum (also ein Zehntel der gesamten Luft) durch $100\,\mathrm{m}^3$ Frischluft (mit $0.03\,\mathrm{m}^3$ CO_2) ersetzt.
- Da wir keine Information über die Art der Lüftung in diesem Raum haben, wissen wir nicht, wie der Luftaustausch (innerhalb einer Minute) vor sich geht.
- Gesucht ist der CO_2-Gehalt nach 15 Minuten.

Diskret

Die gegebenen Informationen legen eine diskrete Modellierung nahe. Wir beschreiben den Lüftungsvorgang durch eine Folge V, dabei ist $V(n)$ das Volumen (in m^3) von CO_2 im Raum nach n Minuten. Der gesuchte CO_2-Gehalt nach 15 Minuten ist dann $\frac{V(15)}{1000}$ bzw. $\frac{V(15)}{10}\,\%$.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$V(n+1) = V(n) - V(n)/10 + 0.03 \ = 0.9 \cdot V(n) + 0.03$$

und $V(0) = 1$.

Wir lösen die Differenzengleichung mit dem CAS Maple:
Ausgehend von $V(0) = 1$ berechnen wir sukzessive die nächsten 15 Folgenglieder der Folge V.

> $V(0) := 1;$
> for n from 0 to 14 do $V(n+1) := 0.9 \cdot V(n) + 0.03$ od;
> $V(1) = 0.93, V(15) = 0.444123792444123792466 2543.$

Die Folgenglieder von V werden exakt (ohne Rundung) berechnet. Der CO_2-Gehalt nach 15 Minuten ist ca. $0.0444\,\%$.

Die Lösung kann auch so berechnet werden:

- Die Lösung der homogenen Differenzengleichung $V(n+1) = 0.9 \cdot V(n)$ mit $V(0) = 1$ ist die geometrische Folge $(0.9^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Eine Lösung der inhomogenen Differenzengleichung $V(n+1) = 0.9 \cdot V(n) + 0.03$ ist die konstante Folge $(0.3)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Daher ist $\{(0.3)_{n\in\mathbb{N}} + c \cdot (0.9^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid c \in \mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge der inhomogenen Differenzengleichung (ohne Anfangsbedingung).
- Die Lösung V mit $V(0) = 1$ ist die Folge $(0.3)_{n\in\mathbb{N}} + 0.7 \cdot (0.9^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Damit kann die Frage b) dieser Aufgabe beantwortet werden. Ist das Volumen der pro Minute zugeführten Frischluft nicht $100\,\mathrm{m}^3$, sondern $x\ \mathrm{m}^3$, dann ist erhalten wir wie oben als Lösung der Differenzengleichung

$$V(n+1) = \left(1 - \frac{x}{1000}\right) \cdot V(n) + 0.0003x \ \text{ und } \ V(0) = 1$$

die Folge

$$(0.3)_{n\in\mathbb{N}} + 0.7 \cdot \left(\left(1 - \frac{x}{1000}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Damit $V(15) = 0.3 + 0.7 \cdot (1 - \frac{x}{1000})^{15} = 0.4$ ist, muss $x = 123.6651178$ sein. Um nach 15 Minuten den gewünschten CO_2-Gehalt von 0.04 % zu erreichen, müssten also pro Minute ca. $123.7\,\mathrm{m}^3$ Frischluft zugeführt werden.

Kontinuierlich

Möchten wir dieselbe Situation kontinuierlich modellieren, müssen wir zusätzliche Annahmen treffen: Wir nehmen an, dass die Funktion W von $\mathbb{R}_+$ nach $\mathbb{R}_+$ mit $W(t) :=$ Volumen (in m^3) von CO_2 im Raum nach t Minuten differenzierbar ist und interpretieren den Differenzenquotienten $\frac{W(n+1)-W(n)}{1}$ näherungsweise als momentane Änderungsrate von W an der Stelle n. Dann ist W die Lösung der Differenzialgleichung $W' = -0.1 \cdot W + 0.03$ mit Anfangswert $W(0) = 1$.

- Die Lösung der homogenen Differenzialgleichung $W' = -0.1 \cdot W$ ist die Exponentialfunktion $\exp_{-0.1}$.
- Eine Lösung der Differenzialgleichung $W' = -0.1 \cdot W + 0.03$ ist die konstante Funktion 0.3.
- Daher ist $\{0.3 + c \cdot \exp_{-0.1} \mid c \in \mathbb{R}\}$ die Lösungsmenge.
- Die Lösung W mit $W(0) = 1$ ist die Funktion $0.3 + 0.7 \cdot \exp_{-0.1}$.

Mit dem CAS Maple erhalten wir $W(1) = 0.9333861926$ und $W(15) = 0.4561911121$. Der CO_2-Gehalt nach 15 Minuten ist ca. 0.0456 %.

Die Differenz $W(1) - V(1)$ ist ca. 0.003 und die Differenz $W(15) - V(15)$ ist ca. 0.012.

7. Résumé

Mathematisch Modellieren bedeutet, einen Sachverhalt, einen Vorgang, einen Zusammenhang, etc. durch Begriffe der Mathematik zu beschreiben.

Linear Modellieren bedeutet, diese Situation durch eine lineare Funktion zu beschreiben.

Wir haben an Hand von Beispielen gezeigt, dass die Entscheidung für lineares Modellieren nicht vorschnell und *nicht ohne hinreichendes Wissen über den Sachzusammenhang* getroffen werden soll.

Diskret modellieren bedeutet, eine Situation durch eine Folge, oder durch eine Differenzengleichung, deren Lösung diese Folge ist, zu beschrieben. Beschreiben wir sie durch eine differenzierbare Funktion, oder eine Differenzialgleichung, deren Lösung diese Folge ist, dann haben wir *kontinuierlich modelliert*. Auch hier muss vorab gut überlegt werden, ob die vorliegenden Informationen nahelegen, diskret zu modellieren oder kontinuierlich zu modellieren. Wir haben dazu zwei Beispiele vorgestellt.

Modellieren ist ein wichtiger Bestandteil der Lehrpläne für Höhere Schulen und das mit gutem Grund. Einerseits können auf diese Weise viele Probleme aus der Lebenswelt der Schülerinnen und Schüler mathematisch beschrieben und dann mit Methoden der Mathematik gelöst werden, wodurch die *Relevanz der Mathematik für das Alltagsleben* deutlich spürbar wird. Andererseits leistet Modellieren im Unterricht einen wichtigen *Beitrag zur Persönlichkeitsentwicklung*. Wer mathematisch modelliert, lernt *genau hinzuschauen*, genau zu unterscheiden, was vorgegeben war und welche Annahmen getroffen wurden, also *vorurteilsfrei zu denken*. Diese Kompetenzen sind in allen Lebensbereichen wichtig, in der Wissenschaft und der Politik ebenso wie in persönlichen Beziehungen.

Wir danken Manfred Borovcnik für das sorgfältige Lesen unseres Manuskripts und viele Verbesserungsvorschläge.

Literatur

Bifie (2015): *Die standardisierte schriftliche Reifeprüfung in Mathematik*. Online in Internet: URL: www.srdp.at/fileadmin/user_upload/downloads/Begleitmaterial/07_MAT/srdp_ma_konzept_neuauflage_2018_2015-10-19.pdf

Bruder, R., Hefendehl-Hebeker, L., Schmidt-Thieme, B. und Weigand, H.-G. (2015): *Handbuch der Mathematikdidaktik*. Heidlberg-Berlin: Springer Spektrum.

Bundesministerium für Bildung (BMB) (2016): *Verordnung der Bundesministerin für Bildung, mit der die Verordnung über die Lehrpläne der allgemein bildenden höheren Schulen geändert wird; Bekanntmachung, mit der die Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen geändert wird*. BGBl. II Nr. 219/2016. URL: www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2016/219.

Bundesministerium für Bildung und Frauen (BMBF) (2000): Lehrplanpaket der Höheren technischen und gewerblichen Lehranstalten 2015 sowie Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht. BGBl. II Nr. 262/2015. URL: www.ris.bka.gv.at/eli/bgbl/II/2015/262.

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur (BMUKK) (2000): *Verordnung des Bundesministers für Unterricht und kulturelle Angelegenheiten, mitder die Verordnung über die Lehrpläne der allgemeinbildenden höheren Schulen geändert wird; Bekanntmachung der Lehrpläne für den Religionsunterricht an diesen Schulen*. BGBl. II Nr. 133/2000. URL: www.ris.bka.gv.at/Dokumente/BgblPdf/2000_133_2/2000_133_2.pdf.

Common Core State Standards Initiative (CCSSI) (2010): *Common Core State Standards for Mathematics*. Washington D.C.: National Governors Association. Online: www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards1.pdf

Kultusministerkonferenz (KMK) (2013): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. München: Luchterhand

Ortlieb, C., Dresky, C. v., Gasser, I. und Günzel, S. (2009): *Mathematische Modellierung*. Wiesbaden: Vieweg+Teubner.

Timischl, W und Kaiser, G. (2005): *Ingenieur-Mathematik 4*. Wien: E. Dorner Verlag.

Vollrath, H.-J. und Roth, J. (2012): *Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe*. Heidelberg: Spektrum.

Verfasser:

Franz Pauer, Universität Innsbruck, Institut für Fachdidaktik und Institut für Mathematik, Innrain 52f, 6020 Innsbruck, franz.pauer@uibk.ac.at

Florian Stampfer, Universität Innsbruck, Institut für Fachdidaktik, Technikerstraße 25, 6020 Innsbruck, florian.stampfer@uibk.ac.at